CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXIII-a, Brăila, 23.05.2015

CLASA a VII-a

1. Demonstrați că nu există numere naturale $a,b,c,\ a>b>c$ cu proprietatea că

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=2^{2015}.$$

Marius Damian, profesor, Brăila

2. Se consideră numerele $B=\overline{b\underbrace{00...0}_{2n+1\,ori}b}$. Demostrați că $\sqrt{B}$ este număr irațional.

Gazeta matematică

3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, $AD\perp BC$, $DF\perp AB$, $DE\perp AC$, $FG\perp BC$, $EH\perp BC$. Construim G_1 simetricul lui G în raport cu AB și H_1 simetricul lui H în raport cu AC. Fie $GG_1\cap HH_1=\{P\}$. Demonstrați că:

a) $\triangle PG_1H_1 \sim \triangle ABC$;

b) Determinați măsurile unghiurilor B și C astfel încât $\triangle PG_1H_1 \equiv \triangle ABC$.

Adela Dimov, profesor, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXIII-a, Brăila, 23.05.2015

CLASA a VIII a

1. Determinaţi perechile de numere întregi $(a,\ b)$ cu proprietatea că $\left(a^2\ -\ b^2\right)^2 = 1 + 2b.$

Dan Nedeianu, Drobeta – Turnu Severin

2. Pentru $a > 0$, notăm prin S_a mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$|x+2009| + |x+2008| + ... + |x+1| + |x| + |x-1| + ... + |x-2008| + |x-2009| = a .$$

a) Arătaţi că $S_a \subseteq \left[-\frac{a}{4019}, \frac{a}{4019}\right]$.

b) Arătaţi că, dacă S_a are un singur element, atunci $a - 2009$ este pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

3. Se consideră un tetraedru cu toate feţele triunghiuri dreptunghice şi cu trei muchii congruente. Arătaţi că inversele distanţelor dintre muchiile opuse ale tetraedrului sunt numeric egale cu lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXIII-a, Brăila, 23.05.2015

CLASA a IX-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\left[\frac{3x-4}{6}\right]-\left[\frac{1-3x}{6}\right]=\frac{6x-1}{5}$.

Carmen şi Viorel Botea, profesori, Brăila

2. Se consideră numere reale strict pozitive a,b,c,d cu proprietatea că $ab+bc+cd+da\le 8$.

Să se arate că: $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4}+\frac{c^2+d^2}{(c+d)^4}+\frac{d^2+a^2}{(d+a)^4}\le\frac{1}{abcd}$.

Traian Tămâian, profesor, Carei

3. Se consideră cercurile concentrice $C_i(O,r_i), i\in\mathbb{N}^*$, de centru O şi raze $0<r_1<r_2<...<r_i<..., i\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea că aria unui disc $D_i(O,r_i)$ este de două ori mai mare decât aria discului $D_{i-1}(O,r_{i-1})$ şi jumătate din aria discului $D_{i+1}(O,r_{i+1}), \forall i\ge 2$.

a) Fie d o dreaptă tangentă la cercul $C_{200}(O,r_{200})$. În câte puncte va tăia dreapta d cercurile $C_k(O,r_k), k\in\{1,2,...,2015\}$?

b) Se consideră un triunghi echilateral $\triangle ABC$ centru O. Aflaţi numărul maxim de cercuri din familia de mai sus intersectate de laturile triunghiului . Precizaţi numărul punctelor de intersecţie dintre laturile triunghiului ABC şi mulţimea cercurilor.

Crestez Paul, elev, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „VICTOR VÂLCOVICI” EDIŢIA a XXIII-a, BRĂILA, 23.05.2015

CLASA A X-A

1. Fie p produsul primelor 2000 de numere prime. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $\left(2^{2001}-2\right)\cdot p$.

Traian Tămâian, profesor, Carei

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ ecuaţia:

$$\log_2\left(x^{\log_{2015}\frac{5}{13}}+x^{\log_{2015}\frac{12}{13}}\right)+x^{\log_{2015}\frac{5}{13}}\left(x^{\log_{2015}\frac{5}{13}}+1\right)+x^{\log_{2015}\frac{12}{13}}\left(x^{\log_{2015}\frac{12}{13}}+1\right)+2x^{\log_{2015}\frac{60}{169}}=2.$$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm E mijlocul laturii (AB) şi F,K,G centrele de greutate respectiv pentru triunghiul ABC, triunghiul BCD şi patrulaterul $ABCD$. Arătaţi că pentru orice punct M din plan avem:

$$\frac{6MB}{MA\cdot ME}+\frac{2MC}{ME\cdot MF}+\frac{MD}{MF\cdot MG}\geq\frac{9MK}{MA\cdot MG}.$$

Mihaly Bencze

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.