Clasa a V-a

1. Aflaţi câte numere naturale $\overline{xyz}$ verifică relaţia:

$$x\cdot\overline{yz}-360=z\cdot\overline{yx}.$$

Carmen şi Viorel Botea, profesori, Brăila

<u>**Soluție**</u>:

$x\cdot(10y+z)-360=z\cdot(10y+x).....(1p)\Leftrightarrow 10xy+xz-360=10yz+xz\Leftrightarrow 10y\cdot(x-z)=360\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y\cdot(x-z)=36.....(1p).$

De aici rezultă că $y|36$ şi $y\le 9$ şi $x-z|36$ şi $x-z\ge 4; x-z\le 9\Rightarrow x-z\in\{4,6,9\}$ şi $y\in\{9,6,4\}..(1p).$

$\begin{cases}y=9\\x-z=4\end{cases}\Rightarrow(x,z)\in\{(4,0),(5,1),(6,2),(7,3)(8,4)(9,5)\}$, 6 soluții....$(1p)$

$\begin{cases}y=6\\x-z=6\end{cases}\Rightarrow(x,z)\in\{(6,0),(7,1)(8,2)(9,3)\}....(1p)$, 4 soluții....$(1p)$

$\begin{cases}y=4\\x-z=9\end{cases}\Rightarrow(x,z)\in\{(9,0)\}....(1p)$, 1 soluție....$(1p)$ atunci

$\overline{xyz}\in\{490,591,692,793,894,995,660,761,862,963,940\}$, 11 soluţii....$(1p)$

1. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ fixat, se consideră tabelul

1	1	2	3	3	4	5	5	6	...	2*n* -3	2*n* -3	2*n* -2	2*n* -1	2*n* -1	2*n*
1	3	4	5	7	8	9	11	12	...						

a) Câte coloane avem? Justificaţi răspunsul.
b) Completaţi ultimele 6 casete din linia a doua a tabelului. Justificaţi răspunsul.
c) Calculaţi suma elementelor de pe linia a doua a tabelului.

Carmen şi Viorel Botea, profesori, Brăila

<u>**Soluție**</u>:

a) Formăm tripletele

$(1,1,2),(3,3,4),(5,5,6),...,(2n-3,2n-3,2n-2),(2n-1,2n-1,2n)....(1p) \Rightarrow n$ triplete $\Rightarrow$
$\Rightarrow 3n$ coloane...$(1p)$

b) Observăm regula: un element de pe linia a doua şi coloana ***i*** se obţine adunând elementele de pe linia întâi şi coloanele ***i* -1** şi ***i* +1**....$(2p)$.Ultimele şase poziţii sunt respectiv:
$(2n-4)+(2n-3)=4n-7;(2n-3)+(2n-2)=4n-5;(2n-3)+(2n-1)=4n-4;(2n-2)+(2n-1)=$
$=4n-3;(2n-1)+2n=4n-1;(2n-1)+(2n+1)=4n....(1p)$

c) Observăm că pe linia a doua sunt elemente ce provin din adunări de forma
$(2k-4)+(2k-3)=4k-7;(2k-3)+(2k-2)=4k-5;(2k-3)+(2k-1)=4k-4;(2k-2)+(2k-1)=$
$=4k-3;(2k-1)+2k=4k-1;(2k-1)+(2k+1)=4k.$
Lipsesc toate elementele de forma $M_4+2,$ adică $2,6,...,4n-2....(1p)$.Suma de pe linia a doua este:

$$S=(1+2+3+...+4n)-(2+6+...+4n-2)=\frac{4n(4n+1)}{2}-\frac{4n\cdot n}{2}=2n(4n+1)-2n^2=2n(3n+1)....(1p)$$

3. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele naturale de patru cifre care au produsul cifrelor egal cu zero. Al câtelea număr este 2016?

<u>**Soluţie**</u>: Determinăm mai întâi câte numere naturale de la 1000 la 1999 au produsul cifrelor zero, adică toate numerele care au cel puţin o cifră zero.....$(2p)$.

Din cele 1000 de numere, avem $9\cdot 9\cdot 9=729$ nu conţin cifra zero....$(1p)$. Deci restul de 271 au cel puţin un zero....$(1p)$. De la 2000 până la 2016 sunt 17 numere şi fiecare conţine cifra zero, cel puţin o dată....$(1p)$. În total sunt 271+17= 288 numere, ...$(1p)$ deci 2016 este al 288-lea număr. ....$(1p)$

Clasa a VI-a

1) Determinaţi numerele raţionale x, y, z pentru care

$$\frac{x}{2x+1}=\frac{y}{3y+2}=\frac{z}{4z+3} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{3x+1}+\frac{2}{4y+2}+\frac{3}{5z+3}=6 \ .$$

Lucian Dragomir ,Oţelu-Roşu, Supliment Gazeta, Matematica nr.3\2016

Barem :

Condiţii :

$2x+1\neq 0$, $x\neq \frac{-1}{2}$, $3x+1\neq 0$, $x\neq \frac{-1}{3}$, $3y+2\neq 0$, $y\neq \frac{-2}{3}$, $4y+2\neq 0$, $y\neq \frac{-2}{4}$, $4z+3\neq 0$, $z\neq \frac{-3}{4}$,

$5z+3\neq 0$, $z\neq \frac{-3}{5}$. Dacă $x=y=z=0$, înlocuind în a doua relaţie obţinem $3=6$ fals .

Dacă $x=0$, înlocuind în prima relaţie obţinem $y=z=0$, fals …………… **(1 p)**

Rezultă x, y, z nenule . Deci $\frac{2x+1}{x}=\frac{3y+2}{y}=\frac{4z+3}{z}=k$, $2+\frac{1}{x}=k$, $x=\frac{1}{k-2}$, $3+\frac{2}{y}=k$,

$y=\frac{2}{k-3}$, $4+\frac{3}{z}=k$, $z=\frac{3}{k-4}$,…….. **(1 p)**

Înlocuim x, y, z în a doua relaţie . Deci $\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{\frac{3}{k-2}+1}=\frac{k-2}{k+1}$,

$\frac{2}{4y+2}=\frac{2}{\frac{8}{k-3}+2}=\frac{2\cdot(k-3)}{2\cdot(k+1)}=\frac{k-3}{k+1}$, $\frac{3}{5z+3}=\frac{3}{\frac{15}{k-4}+3}=\frac{3\cdot(k-4)}{3\cdot(k+1)}=\frac{k-4}{k+1}$,……. **(1 p)**

$\frac{k-2}{k+1}+\frac{k-3}{k+1}+\frac{k-4}{k+1}=6$, $\frac{3k-9}{k+1}=6$, $3k-9=6k+6$, $3k=-15$, $k=-5$,…….. **(1 p)**

Găsim numerele : $x=\frac{1}{k-2}=-\frac{1}{7}$, $y=\frac{2}{k-3}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$, $z=\frac{3}{k-4}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$,…….. **(3 p)**

2) Arătaţi că ecuaţia $x^2+y^{19}+z^{53}=t^{2015}$ are o infinitate de soluţii numere naturale .

George-Florin Şerban, profesor ,Brăila

Barem :

Căutăm soluţii de forma $\left(3^m,3^n,3^p,3^u\right), 3^{2m}+3^{19n}+3^{53p}=3^{2015u}, m,n,p,u\in\mathbb{N}$, ,…….. **(1 p)**

Fie $2m=19n=53p=k$, deci $2015u=k+1$

Deci $k\,\vdots\,2,19,53$, $k\,\vdots\,[2,19,53]=2014$, $k=2014v$, $v\in\mathbb{N}$,…….. **(2p)**

Găsim $m=1007v$, $n=106v$, $p=38v$ şi $u=\dfrac{2014v+1}{2015}\in N$,…….. **(1 p)**

Fie $v=2015w+1, w\in\mathbb{N}$.

Deci $m=1007\cdot 2015\cdot w+1007$, $n=106\cdot 2015\cdot w+106$, $p=38\cdot 2015\cdot w+38$, $u=2014\cdot w+1$.

Deci ecuaţia are o infinitate de soluţii naturale . ,…….. **(3 p)**

3) Se consideră triunghiul ABC , în care $m(C)=2\cdot \mathrm{m(A)}$ şi $AC=2\cdot BC$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Marcel Chiriţă , profesor, Bucureşti

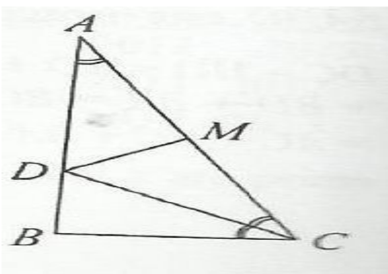
Barem:

Fie $(CD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, $D\in AB$, $\sphericalangle ACD\equiv\sphericalangle BCD\equiv\sphericalangle BAC$ rezultă ΔACD isoscel , $AD=DC$,…….. **(2 p)**

Fie M mijlocul segmentului [AC] , [DM] mediană în ΔACD isoscel rezultă $[DM]$ înălţime , $DM\perp AC$,…….. **(1 p)**

Din $AC=2\cdot BC$ rezultă $MC=\dfrac{AC}{2}=BC, \Delta MDC\equiv\Delta BDC(L.U.L)$ deoarece $MC=BC$, $\sphericalangle MCD\equiv\sphericalangle BCD$ şi $CD=CD\Rightarrow m(\sphericalangle DBC)=m(\sphericalangle DMC)=90^0\Rightarrow m(\sphericalangle DBC)=m(\sphericalangle DMC)=90^0$ rezultă , $m(B)=90^0$,…….. **(3 p)**

$m(\sphericalangle A)+\mathrm{m}(\sphericalangle \mathrm{C})=90^0$, $3\cdot m(\sphericalangle A)=90^0$, $m(\sphericalangle A)=30^0$, $m(\sphericalangle C)=60^0$,…….. **(1 p)**



Inspectoratul Şcolar Judeţean Brăila
Colegiul Naţional "Nicolae Bălcescu" Brăila
Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Brăila

Concursul interjudeţean de matematică "Victor Vâlcovici"
Ediţia a - a, 14 mai 2016

CLASA A VII-A, SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Arătaţi că numărul n^4+n^2+3 nu poate fi scris ca suma a două numere prime.

Gazeta Matematică

Soluţie.

$n^4+n^2+3=n^2\left(n^2+1\right)+3$ este număr impar ………………………………………..…...2p

Presupunem că există două numere prime *a* şi *b* astfel încât $n^4+n^2+3=a+b$ şi cum n^4+n^2+3 impar, unul dintre numerele *a* şi *b* trebuie să fie 2 ………………………………………….2p

Obţinem $n^4+n^2+3=2+b \Leftrightarrow b=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ şi numerele n^2+n+1 şi n^2-n+1 sunt mai mari decât 3, adică *b* nu este prim. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă ……….3p

2. Fie numerele naturale nenule a, b astfel încât $a \cdot b \vdots 6$. Demonstraţi că $a^{2016}+b^{2016} \vdots 4$ sau $a^{2016}+b^{2016}-1 \vdots 4$.

Daniela şi Nicolae Stănică

Soluţie.

<u>Cazul I:</u>

Dacă $a=6k \Rightarrow a^{2016} \vdots 4$.

Avem $b \in \{6p; 6p+1; 6p+2; 6p+3; 6p+4; 6p+5\}$. Dacă b este număr par, atunci $b^{2016} \vdots 4$.

Avem de studiat doar cazurile când *b* este impar.

$\left(6p+1\right)^{2016}=\left(36p^2+12p+1\right)^{1008}=\left(M_4+1\right)^{1008}=M_4+1 \Rightarrow b^{2016}-1 \vdots 4$.

$\left(6p+3\right)^{2016}=\left(36p^2+36p+9\right)^{1008}=\left(M_4+1\right)^{1008}=M_4+1 \Rightarrow b^{2016}-1 \vdots 4$.

$\left(6p+5\right)^{2016}=\left(36p^2+60p+25\right)^{1008}=\left(M_4+1\right)^{1008}=M_4+1 \Rightarrow b^{2016}-1 \vdots 4$.…………………….…2p

<u>Cazul II:</u>

Dacă $b=6k,$ se studiază analog ca în cazul I. ………..…………………………………………1p

<u>Cazul III:</u>

Dacă $a \vdots 2$ şi $b \vdots 3$

$a \vdots 2 \Rightarrow a^{2016} \vdots 4$.

Dacă *b* este par, atunci $a^{2016}+b^{2016} \vdots 4$.

Din $b\vdots 3$ şi b impar, obţinem că b este de forma $4k\pm 1 \Rightarrow b^{2016}=M_4+1 \Rightarrow b^{2016}-1\vdots 4$ 3p

Cazul IV:

Dacă $a\vdots 3$ şi $b\vdots 2$, se studiază analog ca în cazul III..1p

3. Fie dreptunghiul $ABCD(AB>BC)$ şi $(BB'$ bisectoarea $\widehat{ABC}$, $B'\in AD.$ Avem $(DP$ bisectoarea $\widehat{CDB'}$, $P\in(BB')$ şi $CP\cap AD=\{R\}$, $AP\cap DC=\{Q\}$, $BB'\cap DC=\{S\}$, $RQ\cap AB=\{T\}$. Dacă $TS \parallel AP$, arătaţi că $L^3=l^3+2L^2l,$ unde $AB=L$ şi $BC=l.$

Daniela şi Nicolae Stănică

Soluţie.

$\Delta ADP\equiv\Delta CSP$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $AP=PC$ şi $AP\perp RC$. (1) 1p

Dar $\Delta APR\equiv\Delta CPQ$ (C.U.) $\Rightarrow$ $QC=AR$ $\Rightarrow$ $QS=DR.$

Din $TS \parallel AQ \Rightarrow$ $ATSQ$ paralelogram $\Rightarrow$ $AT=QS$ $\Rightarrow$ $AT=RD$.

Dar $DQ \parallel AT$ $\Rightarrow \dfrac{DQ}{AT}=\dfrac{RD}{AR}$ $\Rightarrow$ $AT=\dfrac{DQ\cdot AR}{RD}$ (2) 1p

Din teorema lui Menelaus în $\Delta DB'S$ şi transversala $R-P-C$:

$$\frac{DR}{RB'}\cdot\frac{B'P}{PS}\cdot\frac{CS}{CD}=1\Rightarrow\frac{DR}{DR+RB'}=\frac{CD}{CD+CS}\Rightarrow DR=\frac{L\cdot(L-l)}{L+l}$$

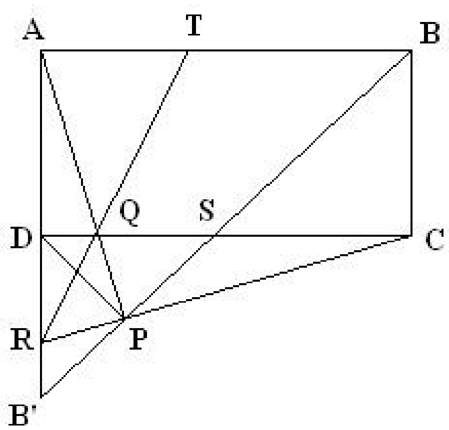
(3)..1p

$\Delta ADQ\sim\Delta CDR$ (U.U.)$\Rightarrow \dfrac{DQ}{RD}=\dfrac{l}{L}$ (4)................................1p

Din (2) şi (4) $\Rightarrow$ $AT=\dfrac{l}{L}\cdot AR=\dfrac{l}{L}\cdot(l+DR)$ şi conform (3) obţinem:

$$AT=\frac{l}{L}\cdot\left(l+\frac{L^2-L\cdot l}{L+l}\right)=\frac{l}{L}\cdot\left(\frac{L^2+l^2}{L+l}\right).$$

Din condiţia $AT=RD$ $\Rightarrow$ $\dfrac{l}{L}\cdot\left(\dfrac{L^2+l^2}{L+l}\right)=\dfrac{L\cdot(L-l)}{L+l}$ $\Rightarrow L^3=l^3+2L^2l.$............................3p



CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediţia a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA a VIII a

1. a) Arătaţi că, oricare ar fi numărul real x, are loc inegalitatea $x^4-2x^3-8x+16\geq 0$. Când are loc egalitatea ?

b) Aflaţi numere reale $x_1, x_2, ..., x_{2016}$ care verifică simultan condiţiile :

i) $8(x_1+x_2+...+x_{2016})=32255$

ii) $x_1^4+x_2^4+...+x_{2016}^4=2(x_1^3+x_2^3+...+x_{2016}^3)-1$

Carmen şi Viorel Botea, profesori, Brăila

Rezolvare:

a) $x^3(x-2)-8(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3-8)\geq 0....(1p) \Leftrightarrow (x-2)(x-2)(x^2+2x+4)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2\left[(x+1)^2+3\right]\geq 0......(1p)$,Egalitatea are loc pentru $x=2.....(1p)$.

b) Scădem relaţia i) din ii) şi obţinem

$x_1^4+x_2^4+...+x_{2016}^4-8(x_1+x_2+...+x_{2016})=2(x_1^3+x_2^3+...+x_{2016}^3)$-32256; $32256=2016\cdot 16.....(2p)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (x_1^4-8x_1-2x_1^3+16)+(x_2^4-8x_2-2x_2^3+16)+....+(x_{2016}^4-8x_{2016}-2x_{2016}^3+16)\geq 0.....(1p)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1-2)^2(x_1^2+2x_1+4)+(x_2-2)^2(x_2^2+2x_2+4)+...+(x_{2016}-2)^2(x_{2016}^2+2x_{2016}+4)\geq 0,$ adevărat.

Egalitatea are loc pentru $x_1=x_2=...=x_{2016}=2,$ fals deoarece nu verifică i) deci problema nu are soluţii...$(1p)$

2. Dacă $a_1, a_2, a_3......a_n$ sunt numere reale şi $a_1, a_2, a_3......a_n>\frac{1}{4}$ demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{a_1^4+a_2^4}}{4a_1-1}+\frac{\sqrt{a_2^4+a_3^4}}{4a_2-1}+...........+\frac{\sqrt{a_n^4+a_1^4}}{4a_n-1}\geq\frac{n\sqrt{2}}{4}$$

Daniela Tilincă şi Adriana Mihăilă, profesori, Brăila

Rezolvare:

Folosind inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}, a,b>0\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geq\frac{a+b}{\sqrt{2}},(1)....(1p)$

$$\frac{\sqrt{a_1^4+a_2^4}}{4a_1-1}+\frac{\sqrt{a_2^4+a_3^4}}{4a_2-1}+...+\frac{\sqrt{a_n^4+a_1^4}}{4a_n-1}\stackrel{(1)}{\geq}....(1p)\frac{a_1^2+a_2^2}{\sqrt{2}(4a_1-1)}+\frac{a_2^2+a_3^2}{\sqrt{2}(4a_2-1)}+...+\frac{a_n^2+a_1^2}{\sqrt{2}(4a_n-1)}=....(1p)$$

$$\frac{a_1^2}{\sqrt{2}(4a_1-1)}+\frac{a_2^2}{\sqrt{2}(4a_1-1)}+\ldots+\frac{a_n^2}{\sqrt{2}(4a_n-1)}+\frac{a_1^2}{\sqrt{2}(4a_n-1)}\geq^{(2)}\frac{(2a_1+2a_2+\ldots\ldots+2a_n)^2}{\sqrt{2}(8a_1+8a_2+\ldots\ldots+8a_n-2n)}\ldots(3p)=$$

$$=\frac{4(a_1+a_2+\ldots..+a_n)^2}{2\sqrt{2}(4a_1+4a_2+\ldots\ldots+4a_n-n)}=\frac{2x^2}{\sqrt{2}(4x-n)}\geq\frac{n\sqrt{2}}{4},\ldots(1p)$$

$$\left((2)\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots\ldots..+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots..+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots.+b_n},b_i>0,i=\overline{1,n}\right)$$

Avem $4x^2\geq n(4x-n)\Leftrightarrow 4x^2-4nx+n^2\geq 0\Leftrightarrow(2x-n)^2\geq 0$. Egalitatea are loc pentru $x=\frac{n}{2}$ şi $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{2}$.

3. Fie $ABCD$ tetraedru cu toate muchiile de lungime a. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului $BCD, M\in(BC), N\in(BD)$ astfel încât M,O,N sunt coliniare. Fie A' mijlocul lui (CD).

a) Calculaţi cosinusul unghiului format de BA' cu planul (CAD).

b) Arătaţi că $\frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}=\frac{3}{a}$.

c) Arătaţi că $BM^2+BN^2\geq\frac{8a^2}{9}$.

Prelucrare, Carmen şi Viorel Botea, profesori, Brăila

Rezolvare:

a) ΔBCD este echilateral $\Rightarrow O$ este centrul său de greutate $\left(\widehat{BA',(CAD)}\right)=\left(\widehat{BA',AA'}\right)=\widehat{BA'A}=\widehat{OA'A}\ldots\ldots(1p)$. În $\triangle OAA', \cos OA'A=\frac{OA'}{AA'}=\frac{OA'}{BA'}=\frac{1}{3}\ldots\ldots(1p)$

b) Fie $MN\cap CD=\{T\}$. Aplicăm teorema lui Menelaus în $\Delta BCA'$, secanta $M-O-T\Rightarrow\frac{BM}{MC}\frac{CT}{TA'}\frac{OA'}{BO}=1\Rightarrow\frac{BM}{MC}\frac{CT}{TA'}\frac{1}{2}=1\Rightarrow\frac{MC}{BM}=\frac{CT}{2TA'},(1)\ldots.(1p)$

Aplicăm teorema lui Menelaus în $\Delta BA'D$, secant $O-N-T\Rightarrow\frac{BN}{ND}\frac{DT}{TA'}\frac{OA'}{BO}=1\Rightarrow\frac{BN}{ND}\frac{DT}{TA'}\frac{1}{2}=1\Rightarrow\frac{ND}{BN}=\frac{TD}{2TA'},(2)\ldots.(1p)$

Adunând (1) cu $(2)\Rightarrow$

$$\frac{MC}{BM}+\frac{ND}{BN}=\frac{CT+TD}{2TA'}\Leftrightarrow\frac{a-BM}{BM}+\frac{a-BN}{BN}=\frac{2CA'+DT+TD}{2TA'}\Leftrightarrow\frac{a}{BM}+\frac{a}{BN}-2=\frac{2\left(DT+DA'\right)}{2TA'}\Leftrightarrow$$

$$a\left(\frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}\right)-2=\frac{2TA'}{2TA'}\Rightarrow a\left(\frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}\right)=3\Rightarrow \frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}=\frac{3}{a}.....(1p).$$

Dacă $MN\parallel CD\Rightarrow BM=BN=\frac{2a}{3}\Rightarrow \frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}=\frac{3}{a}$.

c) Avem $(BM+BN)\left(\frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}\right)\geq 4\Rightarrow BM+BN\geq \frac{4a}{3}.....(1p)$ Din inegalitatea C.B.S. avem

$$2\left(BM^2+BN^2\right)\geq (BM+BN)^2\geq \frac{16a^2}{9}\Rightarrow BM^2+BN^2\geq \frac{8a^2}{9}.....(1p)$$

Concursul Interjudetean De Matematica

"Victor Valcovici"

Editia a XXIV-a, Braila, 14.05.2016

Solutii , clasa a IX-a

Problema 1

Fie f : $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o functie crescatoare care are proprietatea

(f ° f) (n) = n^2, (∀) n ϵ $\mathbb{N}^*$. Se cere :

a) Sa se calculeze f (4) , stiind ca 3 ϵ Imf.

b) Sa se demonstreze ca f (n^2) ≥ $(n+1)^2$, (∀) n ≥ 2.

Solutie:

a) Daca f (1) ≥ 1 si f crescatoare ⇒ f (f (1))≥ f(1)⇒ 1 ≥ f (1) ⇒

⇒ f (1) = 1……..(1p)

Cum f crescatoare ⇒ f(n) ≤ f (n+1), (∀) n ≥ 1.

Observam ca f (n) = f (n+1) ⇒ f(f (n)) = f (f (n+ 1))⇒

⇒ $n^2 = (n+1)^2$, fals.

Deci, f (n)< f (n + 1) , (∀) n ϵ $\mathbb{N}^*$……..(1p)

3 ϵ Imf si f strict crescatoare⇒ f (2) ϵ {2,3}.

f (2) = 2 ⇒ f (f (2)) = f (2) ⇒ 4 = 2 , fals.

Deci, f (2) = 3 ⇒ f (f (2)) = f (3) ⇒2^2 = f (3)⇒

⇒ 4= f (3) ⇒f (4) = f (f (3))⇒ f(4)= 9. ……..(2p)

b) f(f(n)= n^2 ⇒ f (f(f (n)))= f(n^2) ⇒ f^2(n) = f(n^2),(∀) n$\epsilon\mathbb{N}$.

Demonstram ca f(n) ≥ f(n+1), (∀) n ≥2.

Cum f crescatoare si f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ⇒f(n)≥ n , (∀) n $\epsilon\ \mathbb{N}^*$

Daca f (n) = n, atunci f(f(n))= f(n),deci n^2 = n , adica n= 1.

Asadar, f(n)≥n+1, (∀) n ≥ 2⇒f(n^2)≥ $(n + 1)^2$, ∀ $n\epsilon\mathbb{N}$,n ≥2. …..(3p)

Problema 2

Fie k un numar natural impar si $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k$ numere naturale impare.

Sa se arate ca:

$n_1{}^2 - n_2{}^2 + n_3{}^2 - n_4{}^2 + \ldots + n_k{}^2 \geq 2k^2 - 1$.

Solutie:

$n_1{}^2 - n_2{}^2 + n_3{}^2 - n_4{}^2 + \ldots + n_k{}^2 = (n_{2m+1}{}^2 - n_{2m}{}^2) + (n_{2m-1}{}^2 - n_{2m-2}{}^2) + \ldots + (n_3{}^2 - n_2{}^2) + n_1{}^2$ ⇔……..(1p)

⇔ $n_1{}^2 - n_2{}^2 + n_3{}^2 - n^2{}_4 + \ldots + n_k{}^2 = (n_{2m+1} + n_{2m}) (n_{2m+1} - n_{2m}) + (n_{2m-1} + n_{2m-2}) (n_{2m-1} - n_{2m-2}) + \ldots + (n_3 + n_2)(n_3 - n_2) + n_1{}^2 \geq 2 (n_{2m+1} + n_{2m} + \ldots + n_3 + n_2) + n_1{}^2$,

Unde k= 2m+1 , $n_{2p+1} - n_{2p} \geq 2$, (∀) $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ numere natural impare consecutive. ……..(3p)

Cum suma primelor k = 2m + 1 numere impare consecutive este k^2, rezulta ca:

$n_1{}^2 - n_2{}^2 + n_3{}^2 - n_4{}^2 + \ldots + n_k{}^2 \geq 2\,(\,n_k + n_{k-1} + \ldots + n_2\,) + n_1{}^2 \geq 2\,(\,(\,2k-1\,) + (\,2k-3\,) + \ldots + 3\,) + 1 = 2\,(\,k^2 - 1\,) + 1 =$

$= 2\,k^2 - 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Se observa din ipoteza problemei ca $n_k \geq 2k - 1$. ……..(3p)

Problema 3.

In triunghiul ABC se considera punctele M$\epsilon(AB)$, N$\epsilon(BC)$, P$\epsilon(CA)$cu AM = BN = CP. Daca G_1, G_2,G_3sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AMP , BMN, CNP , sa se arate ca triunghiurile ABC si $G_1G_2G_3$ au acelasi centru de greutate daca si numai daca triunghiul ABC este echilateral.

Solutie:

Fie triunghiul ABC, cu AB = c,BC = a, AC = b .

Notam AM = BN = CP = x.

$\overrightarrow{AM} = \frac{x}{c}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{x-c}{c}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{x}{a}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{x-a}{a}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CP} = \frac{x}{b}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{x-b}{b}\overrightarrow{CA}$ ……..(1p)

Cum G este centrul de greutate al Δ ABC $\Rightarrow (\forall)$ xϵP , $\overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}}{3}$

Asadar, ΔABC si $\Delta G_1G_2G_3$ au acelasi centru de greutate $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) = \frac{1}{3}\,(\,\overrightarrow{XG_1} + \overrightarrow{XG_2} + \overrightarrow{XG_3}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$. ……..(2p)

Fie A_1 mijlocul laturii (MP), $G_1 \epsilon$ (A A_1).

Avem $\overrightarrow{AG_1} = 2\, \overrightarrow{G_1A_1}$, $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{A_1G_1}$

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AG_1} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP})$.

Analog, rezulta $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN})$, $\overrightarrow{CG_3} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CN})$. ……..(2p)

$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{c} \overrightarrow{AB} + (\frac{x}{b} - 1) \overrightarrow{CA} + (\frac{x}{c} - 1) \overrightarrow{AB} + \frac{x}{a} \overrightarrow{BC} + (\frac{x}{a} - 1) \overrightarrow{BC} + \frac{x}{b} \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\frac{2x}{c} - 1) \overrightarrow{AB} + (\frac{2x}{a} - 1) \overrightarrow{BC} + (\frac{2x}{b} - 1) (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\frac{2x}{c} - \frac{2x}{b}) \overrightarrow{AB} + (\frac{2x}{a} - \frac{2x}{b}) \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) = 0 \\ 2x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ a = b = c . ……..(2p)

Clasa a 10-a

Problema 1

1. Pentru orice triplet de funcții, $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ demonstrați că există $x, y, z \in [0,1]$ astfel încât

$$\left| f(x) + g(y) + h(z) - xyz \right| \geq \frac{1}{3}$$

***

Soluție:

Presupunem că pentru oricare $x, y, z \in [0,1]$ avem $|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| < \frac{1}{3}$.

Atunci, particularizând obținem următoarele inegalități:

$|f(0) + g(0) + h(0)| < \frac{1}{3}$,

$|f(0) + g(y) + h(z)| < \frac{1}{3}$,

$|f(x) + g(0) + h(z)| < \frac{1}{3}$,

$|f(x) + g(y) + h(0)| < \frac{1}{3}$ …….(3p)

Astfel vom putea scrie:

$f(x) + g(y) + h(z) = \frac{f(0)+g(y)+h(z)}{2} + \frac{f(x)+g(0)+h(z)}{2} + \frac{f(x)+g(y)+h(0)}{2} - \frac{-f(0)+g(0)+h(0)}{2}$.

Folosind inegalitatea triunghiului vom obține: $|f(x) + g(y) + h(z)| < \frac{2}{3}$.

În particular, $|f(1) + g(1) + h(1)| < \frac{2}{3}$. …….(2p)

Conform presupunerii făcute $|f(1) + g(1) + h(1) - 1| < \frac{1}{3}$, sau

$|1 - f(1) - g(1) - h(1)| < \frac{1}{3}$.

Adunând cele două inegalități și folosind inegalitatea triunghiului obținem:

$1 = |1 - f(1) - g(1) - h(1) + f(1) + g(1) + h(1)| \leq |1 - f(1) - g(1) - h(1)| + |f(1) + g(1) + h(1)| < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, și deci $1<1$, ceea ce este fals. . …….(2p)

Subiectul 2.

2. a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, |z_1| = |z_2|$]i $m|z_1 + z_2| \geq |(2m-1)z_1 + z_2|$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$ atunci $z_1 = z_2$.

b) Fie $ABCD$ un patrulater convex în reperul XOY, $A(a), B(b), C(c), D(d)$ şi $G(g), G_1(e), G_2(f)$ respectiv, centrele de greutate pentru $ABCD, ACO, BDO$ cu $|e| = |f|$ şi $4m|g| \geq 3|(2m-1)e + f|$, $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Gheorghe Alexe şi George-Florin Şerban, profesori , Brăila

Soluţie:

a) $\overline{z_1} \cdot z_1 = \overline{z_2} \cdot z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$, $m^2 |z_1 + z_2|^2 \geq |(2m-1)z_1 + z_2|^2$

$m^2 |z_1|^2 + m^2 |z_2|^2 + m^2 z_1 \overline{z_2} + m^2 z_2 \overline{z_1} \geq (2m-1)^2 |z_1|^2 + |z_2|^2 + (2m-1)(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})$,

$(\mathrm{m}^2 - 2\mathrm{m} + 1)(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) \geq |z_1|^2 (2m^2 - 4m + 2)$, $(m-1)^2(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) \geq 2|z_1|^2 (m-1)^2$,

$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \geq \overline{z_1} \cdot z_1 + \overline{z_2} \cdot z_2$, $(\overline{z_1 - z_2}) \cdot (z_1 - z_2) \leq 0$, $|z_1 - z_2|^2 \leq 0$ dar $|z_1 - z_2|^2 \geq 0$ deci $|z_1 - z_2| = 0$,

$z_1 = z_2$. .. …….(4p)

b) $g = \dfrac{a+b+c+d}{4}, e = \dfrac{a+c+0}{3}, f = \dfrac{b+d+0}{3}$, $|e| = |\mathrm{f}|$, $|\mathrm{a}+\mathrm{c}| = |\mathrm{b}+\mathrm{d}|$,

$4m|g| = m|(a+c)+(b+d)| \geq 3|(2m-1)\mathrm{e} + f| = |(2m-1)(a+c)+(b+d)|$ dar $|\mathrm{a}+\mathrm{c}| = |\mathrm{b}+\mathrm{d}|$

Din a) rezulta $a + c = b + d$, rezulta $ABCD$ este paralelogram . .. …….(3p)

3. Numim ***n-cuvânt*** o succesiune de ***n*** cifre dintr-o mulţime, numită ***alfabet***. Determinaţi câte ***n-cuvinte*** din ***alfabetul*** $A = \{0,1,2\}$ se pot forma, cu proprietatea că oricare ar fi două elemente vecine, acestea diferă cel mult prin 1.

Soluţie:

Fie x_n numărul de *n-cuvinte* care verifică proprietatea din enunţ .Astfel $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

Fie y_n numărul de *n-cuvinte* care verifică proprietatea din enunţ şi care încep cu 0. (Schimbând, de exemplu, 0 cu 2, y_n reprezintă, de asemenea, numărul de *n-cuvinte* care verifică proprietatea din enunţ şi care încep cu 2.) .. …….(2p)

Adăugând o cifră în faţa unui *n-cuvânt*, obţinem:

$$x_{n+1} = 3x_n - 2y_n \text{ şi } y_{n+1} = x_n - y_n.$$

Din cele două relaţii obţinem că $x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$.

Considerăm $x_0 = x_2 - 2x_1 = 1$.

Cum ecuaţia $r^2 - 2r - 1 = 0$ are rădăcinile $1 \pm \sqrt{2}$, $x_0 = 1$ şi $x_1 = 3$, .. …….(3p)

obţinem $x_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$, unde $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ şi $\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Deci $x_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$. …….(2p)