



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA a V-a

1. Aflați câte numere naturale \overline{xyz} verifică relația:

$$x \cdot \overline{yz} - 360 = z \cdot \overline{yx}.$$

Carmen și Viorel Botea, profesori, Brăila

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, se consideră tabelul

1	1	2	3	3	4	5	5	6	...	$2n-3$	$2n-3$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n$
1	3	4	5	7	8	9	11	12	...						

- a) Câte coloane avem? Justificați răspunsul.
b) Completați ultimele 6 casete din linia a doua a tabelului. Justificați răspunsul.
c) Calculați suma elementelor de pe linia a doua a tabelului.

Carmen și Viorel Botea, profesori, Brăila

3. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele naturale de patru cifre care au produsul cifrelor egal cu zero. Al câtelea număr este 2016?

Supliment GM, Cristina Ichim, profesor, București

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

Inspectoratul Școlar Județean Brăila
Colegiul Național "Nicolae Bălcescu", Brăila
Societatea de Științe Matematice din România, filiala
Brăila



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA a VI-a

1) Determinați numerele raționale x, y, z pentru care

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{y}{3y+2} = \frac{z}{4z+3} \quad \text{și} \quad \frac{1}{3x+1} + \frac{2}{4y+2} + \frac{3}{5z+3} = 6.$$

Supliment GM, Lucian Dragomir, profesor, Oțelu-Roșu

2) Arătați că ecuația $x^2 + y^{19} + z^{53} = t^{2015}$ are o infinitate de soluții numere naturale.

George-Florin Șerban, profesor, Brăila

3) Se consideră triunghiul ABC , în care $m(\hat{C}) = 2 \cdot m(\hat{A})$ și $AC = 2 \cdot BC$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Marcel Chiriță, profesor București

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA A VII-A

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Arătați că numărul $n^4 + n^2 + 3$ nu poate fi scris ca suma a două numere prime.

Gazeta Matematică

2. Fie numerele naturale nenule a, b astfel încât $a \cdot b : 6$. Demonstrați că $a^{2016} + b^{2016} : 4$ sau $a^{2016} + b^{2016} - 1 : 4$.

Daniela și Nicolae Stănică

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) și (BB' bisectoarea \widehat{ABC} , $B' \in AD$). Avem (DP bisectoarea $\widehat{CDB'}$, $P \in (BB')$ și $CP \cap AD = \{R\}$, $AP \cap DC = \{Q\}$, $BB' \cap DC = \{S\}$, $RQ \cap AB = \{T\}$). Dacă $TS \parallel AP$, arătați că $L^3 = l^3 + 2L^2l$, unde $AB = L$ și $BC = l$.

Daniela și Nicolae Stănică

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA a VIII a

1. a) Arătați că, oricare ar fi numărul real x , are loc inegalitatea $x^4 - 2x^3 - 8x + 16 \geq 0$. Când are loc egalitatea ?

b) Aflați numere reale $x_1, x_2, \dots, x_{2016}$ care verifică simultan condițiile :

i) $8(x_1 + x_2 + \dots + x_{2016}) = 32255$

ii) $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2016}^4 = 2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2016}^3) - 1$

Carmen și Viorel Botea, profesori, Brăila

2. Dacă $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt numere reale și $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > \frac{1}{4}$ demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{a_1^4 + a_2^4}}{4a_1 - 1} + \frac{\sqrt{a_2^4 + a_3^4}}{4a_2 - 1} + \dots + \frac{\sqrt{a_n^4 + a_1^4}}{4a_n - 1} \geq \frac{n\sqrt{2}}{4}$$

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, profesori, Brăila

3. Fie $ABCD$ tetraedru cu toate muchiile de lungime a . Fie O centrul cercului circumscris triunghiului BCD , $M \in (BC)$, $N \in (BD)$ astfel încât M, O, N sunt coliniare. Fie A' mijlocul lui (CD) .

a) Calculați cosinusul unghiului format de BA' cu planul (CAD) .

b) Arătați că $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} = \frac{3}{a}$.

c) Arătați că $BM^2 + BN^2 \geq \frac{8a^2}{9}$.

Prelucrare, Carmen și Viorel Botea, profesori, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

Inspectoratul Școlar Județean Brăila
Colegiul Național "Nicolae Bălcescu", Brăila
Societatea de Științe Matematice din România, filiala
Brăila



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA a IX a

1. Fie $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ o funcție crescătoare care are proprietatea $(f \circ f)(n) = n^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $f(4)$, știind că $3 \in \text{Im } f$.

b) Să se demonstreze că $f(n^2) \geq (n+1)^2$, oricare ar fi $n \geq 2$.

2. Fie k un număr natural impar și $n_1 < n_2 < n_3 \dots < n_k$ numere naturale impare. Să se arate că:

$$n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2 + \dots + n_k^2 \geq 2k^2 - 1$$

3. În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, cu $AM = BN = CP$. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, CNP să se arate că triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXIV-a, Brăila, 14.05.2016

CLASA a X a

1. Pentru orice triplet de funcții, $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ demonstrați că există $x, y, z \in [0, 1]$ astfel încât

$$|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| \geq \frac{1}{3}$$

2. a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1| = |z_2|$ și $m|z_1 + z_2| \geq |(2m-1)z_1 + z_2|$ și $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$ atunci $z_1 = z_2$.

b) Fie $ABCD$ un patrulater convex în reperul XOY , $A(a), B(b), C(c), D(d)$ și $G(g), G_1(e), G_2(f)$ respectiv, centrele de greutate pentru $ABCD, ACO, BDO$ cu $|e| = |f|$ și $4m|g| \geq 3|(2m-1)e + f|$, $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban, profesori, Brăila

3. Numim *n-cuvânt* o succesiune de n cifre dintr-o mulțime, numită *alfabet*. Determinați câte *n-cuvinte* din *alfabetul* $A = \{0, 1, 2\}$ se pot forma, cu proprietatea că oricare ar fi două elemente vecine, acestea diferă cel mult prin 1.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.