

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXIII-a, Brăila, 23.05.2015**

CLASA a VII-a

1. Demonstrați că nu există numere naturale a, b, c , $a > b > c$ cu proprietatea că

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = 2^{2015}.$$

Marius Damian, profesor, Brăila

2. Se consideră numerele $B = \overline{b00\dots 0b}$. Demonstrați că $\sqrt{B}$ este număr irațional.
 $2n+1$ ori

Gazeta matematică

3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A , $AD \perp BC$, $DF \perp AB$, $DE \perp AC$, $FG \perp BC$, $EH \perp BC$. Construim G_1 simetricul lui G în raport cu AB și H_1 simetricul lui H în raport cu AC . Fie $GG_1 \cap HH_1 = \{P\}$. Demonstrați că:

- a) $\triangle PG_1H_1 \sim \triangle ABC$;
- b) Determinați măsurile unghiurilor B și C astfel încât $\triangle PG_1H_1 \equiv \triangle ABC$.

Adela Dimov, profesor, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

Soluții:

1. Presupunem, prin reducere la absurd, că există numere a, b, c , care să verifice condițiile din enunț. Descompunem expresia din membrul stâng al egalității date:

$$\begin{aligned} ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) &= ab(a-b) + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 = \\ &= ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a^2 - b^2) = (a-b)[ab + c^2 - c(a+b)] = \\ &= (a-b)(ab + c^2 - ac - bc) = (a-b)[a(b-c) - c(b-c)] = \\ &= (a-b)(b-c)(a-c). \quad (2p) \end{aligned}$$

Atunci $(a-b)(b-c)(a-c) = 2^{2015}$ și deducem că există numerele naturale x, y, z astfel încât $x + y + z = 2015$ și $a-b = 2^x$, $b-c = 2^y$, $a-c = 2^z$. (1p)

De aici avem că

$$2^x + 2^y = 2^z \quad (1)$$

și presupunem, fără restrângerea generalității, că $x \geq y$. Atunci există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = y + t$ și obținem

$$2^{y+t} + 2^y = 2^z \Rightarrow 2^y(2^t + 1) = 2^z \Rightarrow 2^t + 1 = 2^{z-y} \Rightarrow 2^t(2^{z-y-t} - 1) = 1. \quad (2p)$$

Rezultă că $t = 0$, deci $x = y$, iar din relația (1) obținem $z = x + 1$. (1p)

Dar ținând cont că $x + y + z = 2015$, deducem că $x + x + x + 1 = 2015 \Rightarrow 3x = 2014$, imposibil, deoarece 2014 nu este divizibil cu 3. (1p)

Presupunerea făcută este falsă, deci nu există numere a, b, c care să verifice condițiile din enunț.

2. Evident, dacă $b \in \{2, 3, 7, 8\} \Rightarrow \sqrt{B} \notin \mathbb{Q}$. (1p)

Dacă $b = 5 \Rightarrow B : 5$, dar B nu se divide cu 25. Rezultă că $\sqrt{B} \notin \mathbb{Q}$. (1p)

Dacă $b = 6 \Rightarrow B : 3$ dar B nu se divide cu 9. Deci $\sqrt{B} \notin \mathbb{Q}$. (1p).

Dacă $b \in \{1, 4, 9\} \Rightarrow B = b \cdot \overline{100 \dots 01}$.

Dar $\overline{100\dots0}_{2n+2} = 10^{2n+2} < \overline{100\dots01}_{2n+1} = 10^{2n+2} + 1 < (10^{n+1} + 1)^2$. Rezultă $\overline{100\dots01}_{2n+1}$ nu poate fi pătrat perfect și $\sqrt{B} \notin \mathbb{Q}(\mathbf{4p})$.

3. a) Demonstrăm mai întâi că punctele G_1, F, E, H_1 sunt coliniare.

Fie $AD \cap FE = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle G_1FB \equiv \sphericalangle BFG \equiv \sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle AFO$ (AFDE dreptunghi).

Rezultă $\sphericalangle G_1FB$ și $\sphericalangle AFE$ opuse la vârf, deci G_1, F, E coliniare. Analog F, E, H_1 coliniare. **(2p)** Rezultă $\sphericalangle H_1G_1P \equiv \sphericalangle FG_1P \equiv \sphericalangle ABC$. Analog $\sphericalangle G_1H_1P \equiv \sphericalangle EH_1P \equiv \sphericalangle ACB$. Deci $\triangle PG_1H_1 \sim \triangle ABC$. **(1p)**

b) $\triangle G_1FG$ este isoscel $\Rightarrow G_1F = FG$. $\triangle H_1EH$ este isoscel $\Rightarrow EH_1 = EH$.

Dar $FGHE$ trapez cu (OD) linie mijlocie $\Rightarrow OD = \frac{FG + EH}{2} \Rightarrow EH_1 + FG_1 = 2OD = AD$,

deoarece AFDE dreptunghi. Rezultă $G_1H_1 = 2AD$. **(2p)**

Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle PG_1H_1 \Rightarrow G_1H_1 = BC \Rightarrow 2AD = BC$. Notăm cu a, b, c , laturile triunghiului ABC

și rezultă $2 \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow b = c$. Deci $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel. **(2p)**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXIII-a, Brăila, 23.05.2015**

CLASA a VIII a

1. Determinați perechile de numere întregi (a, b) cu proprietatea că $(a^2 - b^2)^2 = 1 + 2b$.

Dan Nedeianu, Drobeta – Turnu Severin

Soluție:

Deoarece $1 + 2b \neq 0$, rezultă că $|a| \neq |b|$.

Din faptul că $(a^2 - b^2)^2 > 0$ și b este număr întreg deducem că $b \geq 0$ și, atunci,

$|a| \neq b$. Putem avea $|a| \geq b + 1$ sau $|a| \leq b - 1$. **(1p)** Din prima relație deducem

$a^2 \geq b^2 + 2b + 1$, iar din a doua $a^2 \leq b^2 - 2b + 1$. Putem scrie $a^2 - b^2 \geq 2b +$

$1 > 2b - 1$ sau $a^2 - b^2 \leq -2b + 1 = -(2b - 1)$. **(1p)** Din aceste două relații

avem $|a^2 - b^2| \geq 2b - 1$, care, prin ridicare la pătrat, **(2p)** conduce la $(a^2 -$

$b^2)^2 \geq (2b - 1)^2$, adică $1 + 2b \geq 4b^2 - 4b + 1$, de unde $b \in \{0, 1\}$ $b \leq 4$. **(2p)**

Înlocuind b în relația inițială găsim perechile $(-1, 0)$, $(1, 0)$. **(1p)**

2. Pentru $a > 0$, notăm prin S_a mulțimea soluțiilor ecuației

$$|x + 2009| + |x + 2008| + \dots + |x + 1| + |x| + |x - 1| + \dots + |x - 2008| + |x - 2009| = a.$$

a) Arătați că $S_a \subseteq \left[-\frac{a}{4019}, \frac{a}{4019}\right]$.

b) Arătați că, dacă S_a are un singur element, atunci $a - 2009$ este pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Soluție:

a) Se știe că oricare ar fi numerele reale x, y sunt adevărate relațiile

$$|x| + |y| \geq |x + y| \text{ și } |xy| = |x| \cdot |y|. \text{ De aici deducem că } |x + m| + |x - m| \geq 2|x|. \quad (1p)$$

Fie x_0 o soluție a ecuației. Atunci

$$\begin{aligned} & |x_0 + 2009| + |x_0 + 2008| + \dots + |x_0 + 1| + |x_0| + |x_0 - 1| + \dots + |x_0 - 2008| + \\ & + |x_0 - 2009| = \\ & = (|x_0 + 2009| + |x_0 - 2009|) + (|x_0 + 2008| + |x_0 - 2008|) + \dots + \\ & + (|x_0 + 1| + |x_0 - 1|) + |x_0| \geq 2|x_0| + 2|x_0| + \dots + 2|x_0| + |x_0| = \\ & = (2 \cdot 2009 + 1)|x_0| = 4019|x_0| \quad (2p) \end{aligned}$$

$$\text{și cum } |x_0 + 2009| + |x_0 + 2008| + \dots + |x_0 + 1| + |x_0| + |x_0 - 1| + \dots + |x_0 - 2008| + |x_0 - 2009| = a,$$

$$\text{deducem că } 4019|x_0| \leq a \text{ adică } |x_0| \leq \frac{a}{4019}, \text{ de unde } -\frac{a}{4019} \leq x_0 \leq \frac{a}{4019}.$$

$$\text{În concluzie, } S_a \subset \left[-\frac{a}{4019}, \frac{a}{4019} \right]. \quad (1p)$$

b) Se știe că pentru orice număr x real $|x| = |-x|$. De aici deducem că $|-x + m| = |x - m|$ și $|-x - m| = |x + m|$. Având în vedere cele de mai sus, tragem concluzia că dacă x_0 este soluție a ecuației, atunci și $-x_0$ este soluție a acesteia. **(1p)**. Dacă soluția este unică, trebuie să avem $x_0 = -x_0$, de unde $x_0 = 0$. **(1p)**

$$\text{Dacă soluția este } 0, \text{ atunci } a = 2(1 + 2 + \dots + 2009) = 2009 \cdot 2010.$$

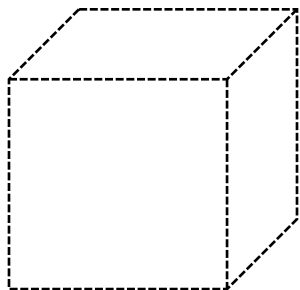
$$\text{De aici rezultă că } a - 2009 = 2009^2, \text{ deci } a - 2009 \text{ este pătrat perfect. } \quad (1p)$$

3. Se consideră un tetraedru cu toate fețele triunghiuri dreptunghice și cu trei muchii congruente. Arătați că inversele distanțelor dintre muchiile opuse ale tetraedrului sunt numeric egale cu lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

Soluție:

a) Cele trei muchii egale nu pot fi pe aceeași față; această față ar deveni triunghi echilateral. Cele trei muchii egale nu pot porni din același vârf; fața opusă acelui vârf ar fi triunghi echilateral.

Dacă notăm tetraedrul $ABCD$, putem avea $AB = BC = CD = a$. **(1p)**



Să determinăm care sunt unghiurile drepte.

Pe fața ABC , $m(\angle ABC) = 90^\circ$, iar pe fața BCD avem

$m(\angle BCD) = 90^\circ$. Dacă $m(\angle ADC) = 90^\circ$, atunci $AD = a$, de

unde $m(\angle AD) = 90^\circ$. În acest caz, mijlocul lui $[AC]$ și

mijlocul lui $[BD]$ ar fi egal depărtate de toate cele patru vârfuri

ale tetraedrului, ceea ce nu e posibil. Deci $m(\angle ACD) = 90^\circ$. **(1p)** Deoarece $DC \perp$

(ABC) și $BC \perp AB$, rezultă că $BD \perp AB$, adică pe (ABD) . Deci unghiul drept este

ABD . **(1p)** (Adică tetraedrul este o parte dintr-un cub, ca în figură.) În aceste condiții,

$d(AB, CD) = a$, $d(BC, AD)$ se măsoară din mijlocul lui $[BC]$ la mijlocul lui $[AD]$; ea

este egală cu $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **(1p)** Deoarece $AC \parallel (BDF)$, rezultă că $d(AB, BD) = d(A, BDF)$

care se calculează cu volumul $[ABDF]$. Rezultă $d(AB, BD) = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **(1p)** Deci inversele

celor trei distanțe sunt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{a}$ și $z = \frac{\sqrt{3}}{a}$, deci concluzia este imediată. **(1p)**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 23.05.2015**

CLASA a IX-a

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left[\frac{3x-4}{6} \right] - \left[\frac{1-3x}{6} \right] = \frac{6x-1}{5}$.

Carmen și Viorel Botea, profesori, Brăila

Soluție:

$$\text{Notăm } \frac{3x-1}{6} = t \text{ (1p)} \Rightarrow \frac{3x-4}{6} = t - \frac{1}{2} \Rightarrow 6t+1=3x \Rightarrow x = \frac{6t+1}{3} \Rightarrow \frac{6x-1}{5} = \frac{6 \cdot \frac{6t+1}{3} - 1}{5} = \frac{12t+1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{1}{2} \right] - [-t] = \frac{12t+1}{5} \text{ (1p)}$$

$$1) \text{ Dacă } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t-1+t = \frac{12t+1}{5} \Rightarrow t = -3 \Rightarrow x = -\frac{17}{3} \text{ (1p)}$$

$$2) \text{ Dacă } t \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [t] = -1 - [-t] \text{ (1p)} \Rightarrow \left[t - \frac{1}{2} \right] + [t] = \frac{12t+1}{5} - 1 \stackrel{\text{Hermite}}{\text{(1p)}} \Rightarrow [2t-1] = \frac{12t-4}{5} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{5k+4}{12} \Rightarrow \left[\frac{5k-2}{6} \right] = k \Rightarrow k \leq \frac{5k-2}{6} < k+1 \Rightarrow k \in \{-7, -6, -5, -4, -3, -2\} \text{ (1p)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in \left\{ \frac{-31}{12}, \frac{-26}{12}, \frac{-21}{12}, \frac{-16}{12}, \frac{-11}{12}, \frac{-1}{2} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-29}{6}, -4, \frac{-19}{6}, \frac{-14}{6}, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3} \right\} \text{ (1p)}$$

2. Se consideră numere reale strict pozitive a, b, c, d cu proprietatea că $ab+bc+cd+da \leq 8$. Să se

arate că: $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4} + \frac{b^2+c^2}{(b+c)^4} + \frac{c^2+d^2}{(c+d)^4} + \frac{d^2+a^2}{(d+a)^4} \leq \frac{1}{abcd}$.

Traian Tămâian, profesor, Carei

Soluție:

$$\text{Vom arăta că } \frac{a^2+b^2}{(a+b)^4} \leq \frac{1}{8ab} \text{ (1p) oricare ar fi numere reale strict pozitive } a, b. \text{ Relația este}$$

$$\text{echivalentă cu } (a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2+b^2) + (2ab)^2 \geq 8ab(a^2+b^2) \text{ (1p)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 + b^2) + (2ab)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab)^2 \geq 0.$ **(2p)** Aplicând de patru ori relația anterioară, prin însumare

obținem $\sum \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^4} \leq \frac{1}{8} \sum \frac{1}{ab} \text{ (1p)} \Leftrightarrow \sum \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^4} \leq \frac{ab+bc+cd+da}{8abcd} \text{ (1p)}$ Cum

$ab+bc+cd+da \leq 8$, **(1p)** rezultă concluzia.

3. Se consideră cercurile concentrice $C_i(O, r_i), i \in \mathbb{N}^*$, de centru O și raze $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots, i \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea că aria unui disc $D_i(O, r_i)$ este de două ori mai mare decât aria discului $D_{i-1}(O, r_{i-1})$ și jumătate din aria discului $D_{i+1}(O, r_{i+1}), \forall i \geq 2$.

a) Fie d o dreaptă tangentă la cercul $C_{200}(O, r_{200})$. În câte puncte va tăia dreapta d cercurile $C_k(O, r_k), k \in \{1, 2, \dots, 2015\}$?

b) Se consideră un triunghi echilateral $\triangle ABC$ centru O . Aflați numărul maxim de cercuri din familia de mai sus intersectate de laturile triunghiului. Precizați numărul punctelor de intersecție dintre laturile triunghiului ABC și mulțimea cercurilor.

Crestez Paul, elev, Brăila

Soluție:

Avem $\frac{A_i}{A_{i-1}} = 2, \forall i \geq 2$, unde A_i este aria discului $D_i(O, r_i), \forall i \in \mathbb{N}^*$.

Deci $\frac{\pi r_i^2}{\pi r_{i-1}^2} = 2 \Rightarrow \frac{r_i}{r_{i-1}} = \sqrt{2}, \forall i \geq 2$, deci șirul $\{r_i\}_{i \geq 1}$ este o progresie geometrică cu rația $q = \sqrt{2}$. **(1p)**

a) Dreapta d va fi exterioară cercurilor $C_1, C_2, \dots, C_{199}$ și secantă pentru $C_{201}, C_{202}, \dots, C_{2015}$. Atunci numărul punctelor de contact este: $2 \cdot (2015 - 200) + 1 = 3631$. **(1p)**.

b) Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral atunci $R = 2r$, cu notațiile obișnuite. **(1p)**

I) Dacă vârfurile $\triangle ABC$ se află pe cercul $C_i(O, r_i) \Rightarrow C_{i-2}(O, r_{i-2})$ este cercul înscris în $\triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow C_{i-1}(O, r_{i-1})$ taie laturile $\triangle ABC$ în $2 \cdot 3 = 6$ puncte; **(1p)** $C_{i-2}(O, r_{i-2})$ este tangent laturilor $\triangle ABC$ deci taie în 3 puncte; $C_i(O, r_i)$ taie laturile $\triangle ABC$ în 3 puncte rezultă $6 + 3 + 3 = 12$ puncte de contact și 3 cercuri tăiate. **(1p)**

II) Dacă $\triangle ABC$ nu are vârfurile pe un cerc din familie, atunci vârfurile vor fi în coroana circulară determinată de $C_i(O, r_i)$ și $C_{i-1}(O, r_{i-1})$ deci laturile triunghiului taie triunghiului $C_{i-1}(O, r_{i-1})$ în

$2 \cdot 3 = 6$ puncte. Apotema $\triangle ABC$ va fi $OM < \frac{r_i}{2} = r_{i-2} \Rightarrow$ laturile $\triangle ABC$ taie $C_{i-2}(O, r_{i-2})$ în

$2 \cdot 3 = 6$ puncte; avem $OM > \frac{r_{i-1}}{2} = r_{i-3}$ **(1p)** atunci cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-3}$ sunt în interiorul $\triangle ABC$,

iar $C_{i+1}, C_{i+2}, \dots$ în exteriorul său. Deci, în acest caz, se taie două cercuri și în total sunt $6 + 6 = 12$ puncte de contact și 2 cercuri tăiate. **(1p)**

Concluzie: Sunt mereu 12 puncte de contact între laturile $\triangle ABC$ și mulțimea cercurilor și cel mult 3 cercuri tăiate.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 23.05.2015**

CLASA a X-a

1. Fie p produsul primelor 2000 de numere prime. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $(2^{2001} - 2) \cdot p$.

Traian Tămâian, profesor, Carei

Soluție: Avem $2(2^{2000} - 1) = 2(256^{250} - 1) = 510(256^{249} + 256^{248} + \dots + 256 + 1) = 510q \cdot (2p)$ Ultima cifră a lui q este 5 atunci $q = 5s$ cu s impar, deci $2^{2001} - 2 = 2550s \cdot (2p)$ Cum $p = 10t$, $(1p)$ cu t impar, rezultă că $(2^{2001} - 2) \cdot p = 25500ts = 25500(2l + 1) = 51000l + 25500(1p)$ deci ultimele trei cifre sunt 5,0 și 0. **(1p)**

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_2 \left(x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} \right) + x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} \left(x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + 1 \right) + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} \left(x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} + 1 \right) + 2x^{\log_{2015} \frac{60}{169}} = 2.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$x > 0$, $f(x) = \log_2 x + x^2 + x$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă **(1p)**

Ecuția devine $\log_2 \left(x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} \right) + x^{2\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{2\log_{2015} \frac{12}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} + 2x^{\log_{2015} \frac{12}{13} + \log_{2015} \frac{5}{13}} =$

$= 2(1p) \Leftrightarrow \log_2 \left(x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} \right) + \left(x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} \right)^2 + x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} = 2 = f(1)(2p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f \left(x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} \right) = f(1) \Rightarrow x^{\log_{2015} \frac{5}{13}} + x^{\log_{2015} \frac{12}{13}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13} \right)^{\log_{2015} x} + \left(\frac{12}{13} \right)^{\log_{2015} x} = 1(1p), \log_{2015} x = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{13} \right)^y + \left(\frac{12}{13} \right)^y = 1 \Rightarrow g(y) = \left(\frac{5}{13} \right)^y + \left(\frac{12}{13} \right)^y$ strict descrescătoare **(1p)** $\Rightarrow y = 2$ soluție unică $\Rightarrow x = 2015^2 \cdot (1p)$

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm E mijlocul laturii (AB) și F, K, G centrele de greutate respectiv pentru triunghiul ABC , triunghiul BCD și patrulaterul $ABCD$. Arătați că pentru orice punct M din plan avem:

$$\frac{6MB}{MA \cdot ME} + \frac{2MC}{ME \cdot MF} + \frac{MD}{MF \cdot MG} \geq \frac{9MK}{MA \cdot MG}.$$

Mihaly Bencze

Soluție:

$$\text{Fie } A(a), B(b), C(c), D(d), E\left(\frac{a+b}{2}\right), F\left(\frac{a+b+c}{3}\right), K\left(\frac{b+c+d}{3}\right), G\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \text{ și } M(z). \textbf{(1p)}$$

Demonstrăm că

$$\frac{9 \left| z - \frac{b+c+d}{3} \right|}{|z-a| \left| z - \frac{a+b+c+d}{4} \right|} \leq \frac{6|z-b|}{|z-a| \left| z - \frac{a+b}{2} \right|} + \frac{2|z-c|}{\left| z - \frac{a+b}{2} \right| \left| z - \frac{a+b+c}{3} \right|} + \frac{|z-d|}{\left| z - \frac{a+b+c}{3} \right| \left| z - \frac{a+b+c+d}{4} \right|}. \textbf{(1p)}$$

Notăm $z_1 = z - a, z_2 = z - b, z_3 = z - c, z_4 = z - d$. **(1p)** Relația de demonstrat devine:

$$\begin{aligned} \frac{9 \cdot 4 |z_2 + z_3 + z_4|}{3 |z_1| |z_1 + z_2 + z_3 + z_4|} &\leq \frac{6 |z_2| \cdot 2}{|z_1| |z_1 + z_2|} + \frac{12 |z_3|}{|z_1 + z_2| |z_1 + z_2 + z_3|} + \frac{12 |z_4|}{|z_1 + z_2 + z_3| |z_1 + z_2 + z_3 + z_4|} \textbf{(1p)} \Leftrightarrow \frac{|z_2 + z_3 + z_4|}{|z_1| |z_1 + z_2 + z_3 + z_4|} \leq \\ &\leq \frac{|z_2|}{|z_1| |z_1 + z_2|} + \frac{|z_3|}{|z_1 + z_2| |z_1 + z_2 + z_3|} + \frac{|z_4|}{|z_1 + z_2 + z_3| |z_1 + z_2 + z_3 + z_4|}. \textbf{(1p)} \end{aligned}$$

Aceasta rezultă prin trecerea la modul a egalității:

$$\frac{z_2}{z_1(z_1 + z_2)} + \frac{z_3}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_2 + z_3)} + \frac{z_4}{(z_1 + z_2 + z_3)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)} = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{z_1(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)}. \textbf{(2p)}$$