CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

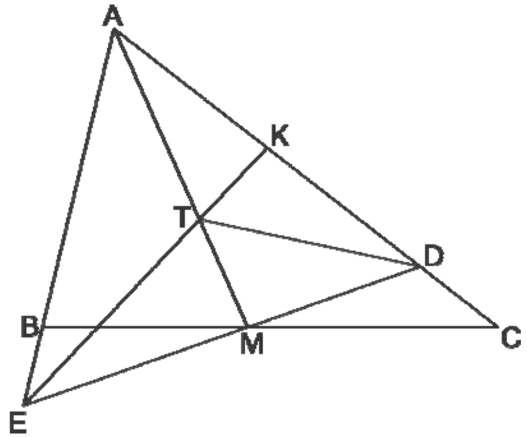
SOLUȚII
CLASA A VII-A

1. Se consideră ΔABC cu $AC=b,\ AB=c,\ c<b$ și punctele $E\in(AB,\ D\in(AC$ astfel încât $AE=AD=\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Notăm cu K mijlocul segmentului (AD), $BC\cap ED=\{M\}$ și $AM\cap EK=\{T\}$.

Aflați valoarea raportului $\dfrac{\text{aria}(\Delta ETD)}{\text{aria}(\Delta TAD)}$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. Mai întâi, $c<\dfrac{2bc}{b+c}<b.$



Din teorema lui Menelaus în ΔABC, cu secanta EMD, avem

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CD}{AD}\cdot\frac{AE}{BE}=1. \quad (1)$$

Ținând cont că $AD=AE$, din (1) rezultă

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BE}{CD}=\frac{\frac{2bc}{b+c}-c}{b-\frac{2bc}{b+c}}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC},$$

de unde rezultă că $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC.

Dar cum $AE=AD$, rezultă că M este mijlocul segmentului (ED), deci T este centrul de greutate al triunghiului AED. Rezultă astfel că

$$\frac{\text{aria}(\Delta ETD)}{\text{aria}(\Delta TAD)}=1.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A VII-A

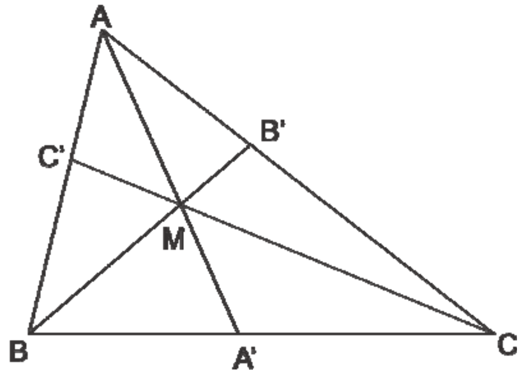
2. Se consideră ΔABC și punctele $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$ și $AA'\cap BB'=\{M\}$. Fie $\{C'\}=CM\cap AB.$

Calculați $\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}-\frac{MA}{MA'}-\frac{MB}{MB'}-\frac{MC}{MC'}.$

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. Notăm $\frac{BA'}{BC}=x,\quad \frac{B'C}{AC}=y,\quad \frac{C'A}{AB}=z$ și obținem

$$CA'=(1-x)a,\ AB'=(1-y)b,\ BC'=(1-z)c.$$



Din teorema lui Ceva în ΔABC, rezultă

$$\frac{x\cdot a}{(1-x)\cdot a}\cdot\frac{y\cdot b}{(1-y)\cdot b}\cdot\frac{z\cdot c}{(1-z)\cdot c}=1\Rightarrow xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Aplicând teorema lui Menelaus în $\Delta AA'C$, cu secanta BMB', rezultă

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{BC}{BA'}\cdot\frac{MA'}{MA}=1\Rightarrow\frac{MA}{MA'}=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{BC}{BA'}=\frac{(1-y)b}{yb}\cdot\frac{a}{xa}\Rightarrow\frac{MA}{MA'}=\frac{1-y}{xy}$$

și analoagele:

$$\frac{MB}{MB'}=\frac{1-z}{yz},\ \frac{MC}{MC'}=\frac{1-x}{zx}.$$

Avem acum

$$\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}-\frac{MA}{MA'}-\frac{MB}{MB'}-\frac{MC}{MC'}=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{x^2y^2z^2}-\frac{1-x}{xy}-\frac{1-y}{yz}-\frac{1-z}{zx}=$$

$$=\frac{1}{xyz}-\frac{x+y+z-xy-yz-zx}{xyz}=\frac{(1-x)-y(1-x)-z(1-x)+yz(1-x)+xyz}{xyz}=.$$

$$=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}+1=1+1=2.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII
CLASA A VII-A

3. Demonstrați că printre 2025 numere naturale distincte, există 729 numere a căror sumă este divizibilă cu 9.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. Mai întâi, arătăm că oricum am alege 5 numere naturale, există 3 dintre ele cu suma divizibilă cu 3.

Cele 5 numere pot fi de forma M_3, M_3+1, M_3-1. Atunci:

- dacă există câte un număr de fiecare formă de mai sus, atunci suma lor se divide cu 3;
- dacă nu, există trei numere care dau același rest prin împărțirea la 3, deci suma lor se divide cu 3.

Acum, arătăm că oricum am alege 25 de numere naturale, fie acestea $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{25}$, există printre ele 9 cu suma divizibilă cu 9.

Formăm 5 grupe de câte 5 numere:

$$\{a_1,...,a_5\},\ \{a_6,...,a_{10}\},\ \{a_{11},...,a_{15}\},\ \{a_{16},...,a_{20}\},\ \{a_{21},...,a_{25}\}.$$

Conform raționamentului de mai sus, în fiecare grupă există câte 3 numere a căror sumă se divide cu 3, adică

$$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}=3k_1,\ a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}=3k_2,\ a_{i_7}+a_{i_8}+a_{i_9}=3k_3,$$
$$a_{i_{10}}+a_{i_{11}}+a_{i_{12}}=3k_4,\ a_{i_{13}}+a_{i_{14}}+a_{i_{15}}=3k_5.$$

Dintre numerele k_1,k_2,k_3,k_4,k_5, există 3 a căror sumă se divide cu 3. Dacă, de exemplu, $(k_1+k_2+k_3)\,\vdots\,3$, atunci

$$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7}+a_{i_8}+a_{i_9}=3(k_1+k_2+k_3)\,\vdots\,9.$$

Avem $2025=25\cdot 81$ și cum din fiecare grupă de 25 de numere există 9 cu suma divizibilă cu 9, rezultă că din cele 2025 de numere, există $9\cdot 81=729$ numere a căror sumă se divide cu 9.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

SOLUŢII

Clasa a VIII a

1. Aflaţi x şi y numere întregi care verifică ecuaţia:

$$\sqrt{x^2-32}+\sqrt{61-x^2}+\sqrt{37-y^2}=\sqrt{4x^2+4xy+y^2}.$$

Adela Dimov, profesor, Brăila

Soluţie: Condiţiile de existenţă a radicalilor implică $x^2 \in [32,61]$ şi $y^2 \leq 37$.
Deoarece $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \{36, 49\}$ şi $y^2 \in \{0,1,4,9,16,25,36\}$.
Mai trebuie ţinut cont de faptul că $\sqrt{4x^2+4xy+y^2}=|2x+y| \in \mathbb{N}$. (1p)

1) Dacă $x^2=36 \Rightarrow x=\pm 6$.

a) $x=6 \Rightarrow 7+\sqrt{37-y^2}=|12+y|$. Cum $y \in [-6,6] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow |12+y|=12+y$.
Ecuaţia devine $\sqrt{37-y^2}=y+5$ şi se impune condiţia $y+5 \geq 0 \Rightarrow y \geq -5$.
Obţinem soluţia $\mathrm{y}=1$. (2p)

b) Dacă $x=-6 \Rightarrow 7+\sqrt{37-y^2}=|-12+y|$.
Cum $y \in [-6,6] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow |-12+y|=12-y$.
Ecuaţia devine $\sqrt{37-y^2}=5-y \Rightarrow 5-y \geq 0$.
Obţinem soluţia $\mathrm{y}=-1$. (2p)

2) Dacă $x^2=49 \Rightarrow \sqrt{17}+\sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi nu există $y \in \mathbb{Z}$ cu $y^2 \in \{0,1,4,9,16,25,36\}$ şi care să verifice ecuaţia problemei. (2p)

Deci rămân soluţiile: $x_1=6,\ \mathrm{y}_1=1$ şi $x_2=-6,\ \mathrm{y}_2=-1$.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

SOLUŢII

Clasa a VIII a

2. Arătaţi că nu există numere naturale x şi y astfel încât

$$\left(x^4+y^4-x^2y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)=2\cdot 4^{1006}.$$

Artur Bălăucă, profesor, Iaşi

Soluţie: Presupunem prin absurd ca exista $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$\left(x_0^4+y_0^{\ 4}-x_0^{\ 2}y_0^{\ 2}\right)\left(x_0^{\ 4}+y_0^{\ 4}+x_0^{\ 2}y_0^{\ 2}\right)=2^{2013}$$

Fie d= (x_0 , y_0). Deci exista $m,n\in\mathbb{N}$ astfel incat avem $x_0 = d\cdot m$ si $y_0 = d\cdot n$ cu (m, n)=1 (1p) **(1)**

Avem $\left(x_0^4+y_0^{\ 4}-x_0^{\ 2}y_0^{\ 2}\right)\left(x_0^{\ 4}+y_0^{\ 4}+x_0^{\ 2}y_0^{\ 2}\right)=\left(x_0^4+y_0^4\right)^2-x_0^4y_0^4=x_0^8+y_0^8+x_0^4y_0^4=2^{2013}$ (1p) **(2)**

Din **(1)** si **(2)** rezulta ca $d^8\left(m^8+n^8+m^4n^4\right)=2^{2013}$, de unde $d^8 / 2^{2013}$, adica $d^8=2^{8p}$ cu $p\in\mathbb{N}$, $p\le 251$. (1 p)

Deci $m^8+n^8+m^4n^4=2^{2013-8p}$ si $2 / m^8+n^8+m^4n^4$ (1 p) **(3)**

Insa din (m,n) = 1 rezulta ca m si n au paritati diferite. (1 p)

Daca m = 2k si n = 2q+1 , unde $k,q\in\mathbb{N}$, atunci $m^8+n^8+m^4n^4=M_2+1$, in contradictie cu relatia **(3)** (1 p)

Analog, m = 2a+1 si n = 2b, unde $a,b\in\mathbb{N}$ conduc la aceeasi concluzie. (1 p)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

SOLUŢII

Clasa a VIII a

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele E şi F pe dreptele AA', respectiv, DD'. Determinaţi intersecţia planelor (EFB) şi (ABC), în cazurile:

a) $E \in (AA'$ şi $F \in (DD'$;

b) $E \in (AA'$ şi $F \notin [DD'$.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

Soluţie:

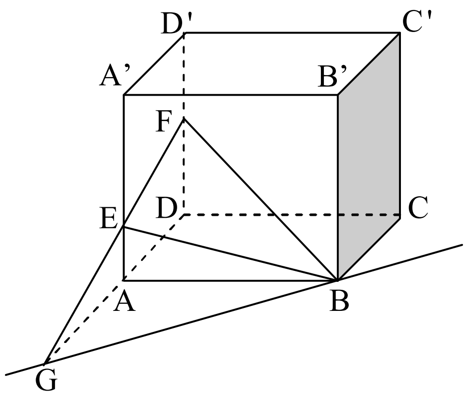


fig. 1

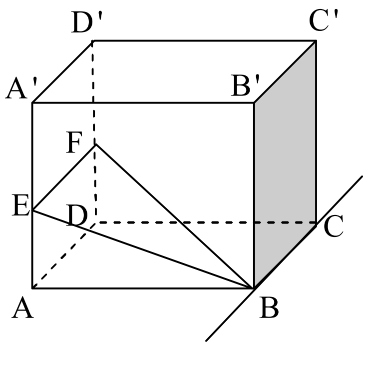


fig. 2

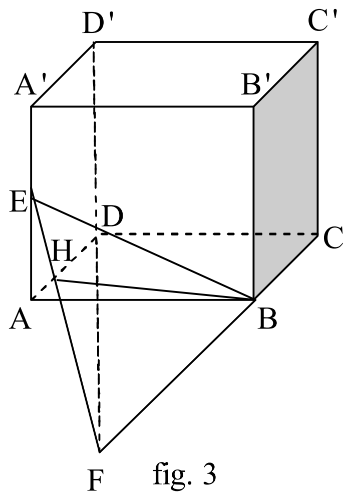


fig. 3

a) Vom deosebi subcazurile:

I) Dreptele EF şi AD nu sunt paralele; ele au, deci, un punct de intersecţie, fie acesta, G; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta GB (fig. 1) (2p)

II) Dreptele EF şi AD sunt paralele; rezultă, deci, că şi dreptele EF şi BC sunt paralele; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta BC. (2p)

b) În acest caz, dreapta EF intersectează segmentul (AD) într-un punct, fie acesta, H; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta HB. (3p)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A IX-A

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică următoarele condiții:

(i) $\left|f(a)-f(b)\right|\le|a-b|$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$;

(ii) $f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0$.

Calculați $f(0)$.

***

Soluție. Din

$$\left|f(0)\right|=\left|f(0)-0\right|\ge\left|f\left(f(0)\right)-f(0)\right|\ge\left|f\left(f\left(f(0)\right)\right)-f\left(f(0)\right)\right|=\left|f\left(f(0)\right)\right|$$

și

$$\left|f\left(f(0)\right)\right|=\left|f\left(f(0)\right)-0\right|\ge\left|f\left(f\left(f(0)\right)\right)-f(0)\right|=\left|f(0)\right|,$$

avem

$$\left|f(0)\right|=\left|f\left(f(0)\right)\right|.$$

Astfel, apar cazurile:

I. dacă $f(0)=f\left(f(0)\right)$, atunci

$$f(0)=f\left(f(0)\right)=f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0;$$

II. dacă $f(0)=-f\left(f(0)\right)$, atunci

$$\left|f(0)\right|=\left|f(0)-0\right|\ge\left|f\left(f(0)\right)-f(0)\right|=2\left|f(0)\right|\Rightarrow f(0)=0.$$

În ambele cazuri am obținut $f(0)=0$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A IX-A

2. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y, z \in [0,1]$, are loc inegalitatea:

$$\frac{x+y}{13+y^5+z^5}+\frac{y+z}{13+z^5+x^5}+\frac{z+x}{13+x^5+y^5}\le\frac{2}{5}.$$

Marius Damian, Brăila

Soluție. Ținând cont că $x, y, z \in [0,1]$, avem

$$\sum_{cyc}\frac{x+y}{13+y^5+z^5}=\sum_{cyc}\frac{x+y}{12+1+y^5+z^5}\le\sum_{cyc}\frac{x+y}{12+x^5+y^5+z^5}=\frac{2(x+y+z)}{12+x^5+y^5+z^5}.$$

Prin urmare, este suficient să arătăm că

$$\frac{2(x+y+z)}{12+x^5+y^5+z^5}\le\frac{2}{5},$$

scrisă echivalent

$$12+x^5+y^5+z^5\ge 5x+5y+5z. \quad (1)$$

Aplicând inegalitatea MA-MG, avem

$$x^5+4=x^5+1+1+1+1\ge 5\sqrt[5]{x^5\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=5x,$$

deci

$$x^5+4\ge 5x.$$

Au loc și inegalitățile analoage

$$y^5+4\ge 5y,\quad z^5+4\ge 5z.$$

Prin însumarea ultimelor trei inegalități, se obține inegalitatea (1).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

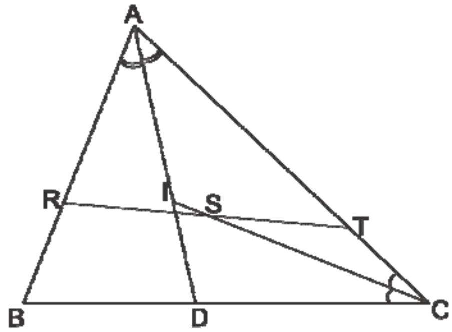
CLASA A IX-A

3. Fie triunghiul *ABC* în care $AB \neq AC$, iar *I* este centrul cercului înscris în triunghi. Punctele *R* și *T* se află pe segmentele (AB) și respectiv (AC) astfel încât $BR = CT = x$, iar S este mijlocul segmentului (RT).

Să se arate că punctele *C*, *S*, *I* sunt coliniare dacă și numai dacă $x = \frac{ac}{2p}$, unde notațiile sunt cele cunoscute.

Enache Pătrașcu, Focșani

Soluție. Exprimăm vectorii $\overrightarrow{CS}$ și $\overrightarrow{CI}$ în baza $\left\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right\}$.



Mai întâi,

$$\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CR}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BR}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{b}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{x}{c}\cdot\overrightarrow{BA}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x}{b}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{x}{c}\cdot\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{c}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{c}\right)\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Apoi, folosind teorema bisectoarei și formula vectorului de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, avem

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{b+c}{a}\cdot\overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{a+b+c}\cdot\left(a\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{CB}\right).$$

În final,

$$C, S, I \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CI} \text{ sunt coliniari} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{c}\right)}{\frac{a}{a+b+c}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{c}\right)}{\frac{b}{a+b+c}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b+c} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{2p}.$$

1. Sa se determine numerele reale x si y care verifica egalitatea:

$$14\left[(x+y)^2+16x^2+16\log_2^2 y\right]=\left(9x+y+12\log_2 y\right)^2.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Solutie

Egalitatea din enunt se mai poate scrie:

$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left[(x+y)^2+(4x)^2+(4\log_2 y)^2\right]=\left[1(x+y)+2\cdot 4x+3\cdot 4\log_2 y\right]^2$ si conform inegalitatii

C – B – S egalitatea are loc daca si numai daca

$\frac{x+y}{1}=\frac{4x}{2}=\frac{4\log_2 y}{3}\Leftrightarrow x+y=2x=\frac{4}{3}\log_2 y\Rightarrow x=y$

si $x=\frac{2}{3}\log_2 y\Rightarrow x>0,\ y>0$ si $3x=2\log_2 x\Leftrightarrow 3x=\log_2 x^2\Leftrightarrow 2^{3x}=x^2\Leftrightarrow 8^x=x^2$. Vom demonstra ca $8^x>x^2,\forall x>0$. Notam $[x]=n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\le x<n+1\Rightarrow 8^n\le 8^x<8^{n+1}$ si $n^2\le x^2<(n+1)^2$.

Vom demonstra prin inductie matematica $P(n):8^n\ge(n+1)^2$

$P(0):8^0\ge 1$ adevarat.

Presupunem P(n) adevarata si vom demonstra ca P (n+1) este adevarata.

$P(n+1):8^{n+1}\ge(n+2)^2$

Dar $8^n\ge(n+1)^2\Rightarrow 8^{n+1}\ge 8(n+1)^2=8n^2+16n+8\ge n^2+4n+4\Rightarrow 8^{n+1}\ge(n+2)^2$ si conform metodei inductiei matematice P (n) este adevarata, $\forall n\ge 0$.

Avem $8^x\ge 8^n\ge(n+1)^2>x^2\Rightarrow$ ecuatia $8^x=x^2$ nu are solutii x > 0, adica nu exista x si y sa verifice egalitatea din enunt.

2. Fie $z_k \in \mathbb{C}^*, |z_k| = r,$ $(\forall)$ k $\in \{1,2,3\ldots 2013\}$. Notam cu $P = z_1 z_2 ... z_{2013}$.
Sa se arate ca daca $z_k + \frac{P}{z_k} \in \mathbb{R},$ $(\forall)$ k $\in \{1,2,3\ldots 2013\}$, atunci $P = 1.$

Cornel Noană și Enache Pătrașcu, profesori, Focșani

Soluţie

2013 = n

$$z_1 + \frac{P}{z_1} = \overline{z_1} + \frac{\overline{P}}{\overline{z_1}} \Rightarrow z_1 + \frac{P}{z_1} = \frac{r^2}{z_1} + \frac{r^{2n-2}}{z_2 \ldots z_n} = \frac{r^2 z_2 \ldots z_n + r^{2n-2} z_1}{P}$$

$$\frac{r^2}{P} = \frac{z_1 + z_2 \ldots z_n}{z_2 \ldots z_n + r^{2n-2} z_1} \overset{\text{analog}}{=} \frac{z_2 + z_1 z_3 \ldots z_n}{z_1 z_3 \ldots z_n + r^{2n-2} z_2} = \frac{(z_1 - z_2)(1 - z_3 \ldots z_n)}{(z_1 - z_2)(r^{2n-2} - z_3 \ldots z_n)} \overset{\text{analog}}{=} \frac{1 - z_1 z_4 \ldots z_n}{r^{2n-2} - z_1 z_4 \ldots z_n} =$$

$$= \frac{(z_1 - z_3) z_4 \ldots z_n}{(z_1 - z_3) z_4 \ldots z_n} = 1 \Rightarrow P = r^2 \Rightarrow z_1 + \frac{r^2}{z_1} = \frac{r^2}{z_1} + \frac{z_1 r^{2n-2}}{r^2} \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow P = 1$$

3. Lotul de elevi care reprezinta o scoala la concursurile de matematica este format din *n* elevi care se deplaseaza la diversele concursuri la care sunt invitati. Intr-o zi scoala lor primeste invitatie la doua concursuri de matematica situate in localitati diferite. Avand in vedere ca participarea la un concurs nu este obligatorie, ca numarul elevilor participanti nu este limitat de catre organizatori si ca nu este obligatoriu ca toti cei *n* elevi sa participe, se cere:

a) Sa se determine in cate moduri se pot organiza delegatiile de elevi la cele doua concursuri.

b) Daca in scoala sunt 2 profesori care insotesc elevii la concursuri, in cate moduri se pot constitui

delegatiile de elevi si profesori daca la un concurs la care merg elevi merge si cel putin un professor? (profesorii nu se deplaseaza la un concurs la care nu merg elevi)

Gabriel Andrei, profesor, Bacau

Solutie: a) Problema se reduce la o problema cunoscuta si anume: "Sa se determine $card\{(X,Y),\ X,Y \subseteq M,\ X \cap Y = \emptyset\}$ unde $cardM = n$" A carei solutie este:

Daca $X = \emptyset$ atunci $Y \subseteq M$ si avem $C_n^0 2^n$ posibilitati,

Daca $X = \{a\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a\}$ si avem $C_n^1 2^{n-1}$ posibilitati,

Daca $X = \{a, b\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a, b\}$si avem $C_n^2 2^{n-2}$ posibilitati,

....

Daca $X = M$ atunci $Y \subseteq M - M$ si avem $C_n^n 2^0$ posibilitati.

Prin urmare avem: $C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^{n-2} 2^{n-2} + \cdots + C_n^n 2^0 = (1+2)^n = 3^n$ delegatii.

b) In contextul in care am introdus si profesorii in delegatii vom avea urmatoarele situatii:

1) Daca merg elevi la ambele concursuri pentru fiecare delegatie de elevi avem 2 variante un profesor merge cu un grup cu celalalt sau invers.
2) Daca elevii merg doar la un concurs avem 3 variante un profesor, celalalt sau amandoi.
3) Daca nu se merge la nici un concurs ramane o singura varianta.

Asadar:

Daca $X = \emptyset$ atunci $Y \subseteq M$ si avem $3C_n^0 2^n - 2$ posibilitati,

Daca $X = \{a\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a\}$ si avem $2C_n^1 2^{n-1} + C_n^1$ posibilitati,

Daca $X = \{a, b\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a, b\}$si avem $2C_n^2 2^{n-2} + C_n^2$ posibilitati,

....

Daca $X = M$ atunci $Y \subseteq M - M$ si avem $2C_n^n 2^0 + C_n^n$ posibilitati.

Si $2(C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^{n-2} 2^{n-2} + \cdots + C_n^n 2^0) + 2^n + 2^n - 1 - 2 = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n - 3$

Clasa a XI a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că $a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x \geq n^{x+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n > \ln(n^n + 1)$, oricare ar fi $n \in N^*$.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Solutie. $\left(\frac{a_1}{n}\right)^x + ... + \left(\frac{a_n}{n}\right)^x \geq n, \forall\ x \in \mathbb{R}..$

Notăm $f(x) = \left(\frac{a_1}{n}\right)^x + ... + \left(\frac{a_n}{n}\right)^x \geq n = f(0),$ 0 punct de minim;

f este derivabilă $\xrightarrow{\text{Teorema lui Fermat}} f'(0) = 0$. $f'(x) = \left(\frac{a_1}{n}\right)^x \ln\frac{a_1}{n} + ... + \left(\frac{a_n}{n}\right)^x \ln\frac{a_n}{n}$;

$f'(0) = \ln\frac{a_1 ... a_n}{n^n} = 0 \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n = n^n, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Se ştie inegalitatea $e^x \geq x + 1,\ x \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = 0$. Atunci $e^{a_1 ... a_n} \geq a_1 a_2 ... a_n + 1 \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n > \ln(n^n + 1), \forall\ \text{n} \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât suma elementelor de pe fiecare coloană este egală cu $k \in \mathbb{C}^*$. Aflaţi k ştiind că raportul dintre suma elementelor de pe coalana n a matricei A^{2013} şi suma elementelor de pe coloana $n-1$ a matricei A^{2012} este 2014.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Solutie. Fie $(A^m)^t = (A^t)^m, \forall\ \mathrm{m} \in \mathbb{N}^*$. Suma elementelor pe fiecare linie în matricea A^t este k. Notăm $B = \begin{pmatrix} 1\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Avem $A^t \cdot B = k \cdot B$. Prin inducţie după $m \in \mathbb{N}^*$ avem $(A^t)^m \cdot B = k^m \cdot B \Rightarrow (A^t)^m$ are aceeaşi proprietate ca şi A^t, în sensul că suma elementelor de pe fiecare linie este aceeaşi, respectiv aici, k^m.

Suma elementelor de pe linia n în $(A^t)^{2013}$ este k^{2013}. Suma elementelor de pe linia $n-1$ în $(A^t)^{2012}$ este $k^{2012} \Rightarrow \dfrac{k^{2013}}{k^{2012}} = k = 2014$.

3. Aflaţi toate funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(f(x))+2f(x)=3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Solutie. Fie $f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f(f(y))\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă,
f continuă $\Rightarrow f$ strict monotonă
Fie $y\in\mathbb{R}$; dem.că $\exists$ x $\in\mathbb{R}$, astfelîncât $f(x)=y$.

$f(y)+2y=3x\Rightarrow x=\dfrac{f(y)+2y}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă .

I. Pp. f strict crescătoare; notăm

$u_0=x,\ u_1=f(x), u_{n+1}=f(u_n)\Rightarrow u_{n+2}+2u_{n+1}=3u_n, \forall\ n\ge 1\Rightarrow t^2+2t-3=0$ (ec. caracteristică)

în $t_{1,2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}\Rightarrow t_1=1$ şi $t_2=-3\Rightarrow u_n=C_1+C_2(-3)^n$;

$$\left.\begin{array}{l} u_0=x=C_1+C_2 \\ u_1=f(x)=C_1-3C_2 \end{array}\right\}\Rightarrow 4C_2=x-f(x)\Rightarrow C_2=\frac{x-f(x)}{4};\ C_1=\frac{3x+f(x)}{4}$$

f strict crescătoare$\Rightarrow u_{n+1}-u_n$ are semn constant $\Rightarrow C_2=0\Rightarrow f(x)=x, \forall\ x\in\mathbb{R}$.

II. Pp. f strict descrescătoare; $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ deoarece f surjectivă; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$; notăm $h(x)=f(x)-x;\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este strict descrescătoare, continuă şi $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=-\infty\Rightarrow\exists!\ x_0\in\mathbb{R},\ h(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=x_0$, deci x_0 este unic punct fix pentru f.

f bijectivă$\Rightarrow\exists g=f^{-1},\ v_0=f(x),\ v_1=x,\ v_2=g(x),...,v_{n+1}=g(v_n)$

$\Rightarrow 3v_{n+2}=2v_{n+1}+v_n,\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ ecuaţia caracteristică $3y^2-2y-1=0$ cu soluţiile 1 si $\dfrac{-1}{3}$.

$$\Rightarrow v_n=C_1'+C_2'\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=v_0=C_1'+C_2' \\ x=v_1=C_1'-\dfrac{C_2'}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)-x=\frac{4C_2'}{3}\Rightarrow C_2'=\frac{(f(x)-x)3}{4} \text{ şi } C_1'=\frac{f(x)+3x}{4}.$$

Dar $g(C_1')=C_1'\Rightarrow f(C_1')=C_1'\Rightarrow C_1'=x_0\Rightarrow\dfrac{f(x)+3x}{4}=x_0\Rightarrow f(x)=-3x+4x_0$.

Aşadar, sunt două soluţii: $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $f(x)=-3x+4x_0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde x_0 este punctul fix al lui f.