CONCURSUL DE MATEMATICĂ
"BĂLCESCU-150"

CLASA a XI-a

1. a) Să se arate că există măcar o matrice pătratică $A \in M_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A^3 = 0_3$ și $A^k \neq 0_3, \forall k \in \{1,2\}$.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de matrice pătratice $B \in M_{2013}(\mathbb{C})$ pentru care toate puterile cu exponentul $k \in \{1,2,...2012\}$ sunt nenule și $B^{2013} = O_{2013}$.

2. a) Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice pătratică cu elemente reale. Să se demonstreze că

$$\min_{1\le j\le n}\left(\max_{1\le i\le n} a_{ij}\right) \ge \max_{1\le i\le n}\left(\min_{1\le j\le n} a_{ij}\right).$$

b) Să se găsească o matrice care nu are toate elementele egale, pentru care egalitatea de mai sus devine egalitate.

c) Într-o matrice de tip 12×12, toate elementele sunt $+1$ sau -1. Se ştie că orice $+1$ are măcar un vecin -1 (pe linie, coloană sau diagonală) iar produsul elementelor pe fiecare linie şi pe fiecare coloană este $+1$. Să se determine numărul minim de elemente egale cu -1 dintr-o astfel de matrice.

3. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir mărginit de numere reale. Ştiind că $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \le a_n, \forall n \ge 2$, să se arate că şirul dat este convergent.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.